

埋め込み境界法を用いた格子ボルツマン法による自然対流解析

NUMERICAL ANALYSIS OF NATURAL CONVECTION WITH
AN IMMERSED BOUNDARY-LATTICE BOLTZMANN METHOD瀬田 剛¹⁾

Takeshi SETA

1) 富山大学大学院理工学研究部 (工学) (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)

We apply the immersed boundary method to the thermal lattice Boltzmann method to simulate natural convection. The thermal lattice Boltzmann method neglects the compression work done by the pressure and the viscous heat dissipation in the evolution equation for the temperature. We utilize the direct forcing method that does not need to determine free parameters. In the numerical calculation of heat transfer between two horizontal concentric cylinders, the deviation between the analytical and numerical results strongly depends on the relaxation parameter. The numerical results of streamlines, isotherms and Nusselt numbers in natural convection show good agreement with those of the previous studies. We demonstrate that the IB-LBM with the adequate relaxation times gives reasonable results for the simulation of flows with heat transfer.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Lattice Boltzmann Method, Immersed Boundary Method, Natural Convection

1. はじめに

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM) は, 等間隔のデカルト座標上に配置された粒子速度分布関数に対する線形な運動方程式から Navier Stokes (NS) 方程式の非線形な対流過程を導出でき, 時間と空間に対し 2 次精度を有する高速計算手法として注目されている⁽¹⁾. 埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM)⁽²⁾ では, デカルト座標上に任意形状の境界を設定できるため, IBM を LBM に適用した Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method (IB-LBM) の研究が, 盛んに行われている^(3, 4, 5, 6). Jeong は, He によって提案された熱流動格子ボルツマン法 (Thermal Lattice Boltzmann Method, TLBM)⁽⁷⁾ に IBM を適用し, 円柱及び角柱周りの自然対流解析を行い, IB-LBM による熱流動解析への有効性を示した⁽⁶⁾. 本論文では, 圧力項と粘性項がない温度方程式に対応した TLBM⁽⁸⁾ に, Direct forcing method に基づく IBM を適用し, IB-LBM の熱流動解析への適用性を検討する.

2. IB-LBM

IBM では, Fig.1 の白丸に示すように構造体の境界面を点の集合体として近似する. この境界上の点に適切な外力 \vec{F}

を発生させることにより, NS 方程式は構造体の影響を受ける. Direct forcing method では, NS 方程式,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{G} + \vec{F}, \quad (1)$$

から外力が計算される. ここで, ρ は密度, \vec{u} は流速, p は圧力, \vec{G} は重力, ν は動粘性係数である. 式 (1) から外力は,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \vec{u} - \vec{G} \\ &= \frac{\vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)}}{\delta t} - rhs, \end{aligned} \quad (2)$$

のように与えられる. ここで, rhs は,

$$rhs = -\left((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \vec{u} - \vec{G}\right), \quad (3)$$

を表す. Fig.1 の白丸で表される境界上の点 \vec{x}_s においても, 式 (2) が成り立つことから,

2010 年 9 月 22 日受付, 2010 年 10 月 27 日受理

[†]Dedicated to the memory of Prof. Masataka TANAKA

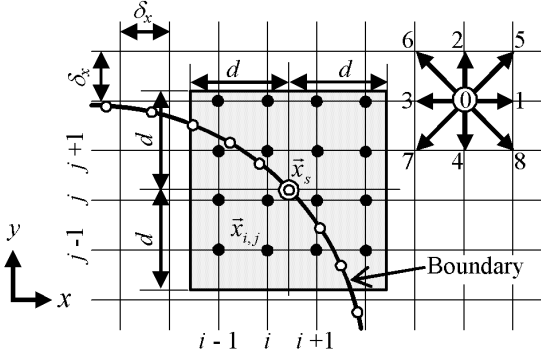


Fig. 1 A schematic of the immersed boundary-lattice Boltzmann method.

$$\begin{aligned}\vec{F}_s &= \frac{\vec{u}_s^{(n+1)} - \vec{u}_s^{(n)}}{\delta_t} - rh_s s_s \\ &= \frac{\vec{u}_s^{(n+1)} - \tilde{\vec{u}}_s}{\delta_t} + \frac{\tilde{\vec{u}}_s - \vec{u}_s^{(n)}}{\delta_t} - rh_s s_s,\end{aligned}\quad (4)$$

となる．ここで，添え字 s は \vec{x}_s 上の値を表す． δ_t は時間刻み幅である． $\tilde{\vec{u}}_s$ は，外力 $\vec{F} = 0$ とした NS 方程式 (1) を満足する速度である． $\vec{u}^{(n+1)}$ は構造体の速度 \vec{u}^d に一致するため，

$$\vec{F}_s = \frac{\vec{u}_s^{(n+1)} - \tilde{\vec{u}}_s}{\delta_t} = \frac{\vec{u}^d - \tilde{\vec{u}}_s}{\delta_t}, \quad (5)$$

となる．温度方程式，

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T = \chi \nabla^2 T + Q, \quad (6)$$

に対しても，Direct forcing approach が有効であることが，Wang により示された⁽⁹⁾．ここで， T は温度， χ は熱拡散率である．NS 方程式と同様に，ソース項 Q が無い温度方程式に対する温度 \tilde{T}_s と，構造体の温度 T^d を用い，境界上の点 \vec{x}_s におけるソース項 Q_s が，

$$Q_s = \frac{T_s^{(n+1)} - \tilde{T}_s}{\delta_t} = \frac{T^d - \tilde{T}_s}{\delta_t}, \quad (7)$$

より求められる． Q_s を補間し，デカルト座標上の値 $Q_{i,j}$ が求められた後，温度方程式 (6) を計算することで，構造体と流体間の熱輸送が考慮される．Fig.1 の黒丸で示されたデカルト座標 $\vec{x}_{i,j}$ 上の値は，

$$\vec{F}_{i,j} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s D(\vec{x}_{i,j} - \vec{x}_s) \cdot \Delta V_s, \quad (8)$$

$$Q_{i,j} = \sum_{s=1}^N Q_s D(\vec{x}_{i,j} - \vec{x}_s) \cdot \Delta V_s, \quad (9)$$

により導出される．ここで， $D(\vec{x})$ はディラックのデルタ関数を平滑化した関数， N は境界を構成する点の総数， ΔV_s は各点に対する体積（2次元では面積）を表し，構造体が半径 R の円の場合 $\Delta V_s = 2\pi R \delta_x / N$ で与えられる．本論文では， $D(\vec{x})$ に次式を適用する．

$$D(\vec{x}_{i,j} - \vec{x}_s) = \delta_h(x_{i,j} - x_s) \delta_h(y_{i,j} - y_s), \quad (10)$$

$$\delta_h(z) = \begin{cases} \frac{1}{2d} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{d}\right) & |z| \leq d, \\ 0 & |z| > d. \end{cases} \quad (11)$$

例えば，二重丸で示された \vec{x}_s 上の値に対し，式 (10)，(11) は，Fig.1 の網掛で示された $2d \times 2d$ の領域内に存在する格子点上の外力とソース項のみが，補間されることを意味する．

式 (5)，(7) により，境界上の外力とソース項を求めるためには，格子点 $\vec{x}_{i,j}$ 上の流速 $\tilde{u}_{i,j}$ と温度 $\tilde{T}_{i,j}$ から，境界上の値 $\tilde{\vec{u}}_s$ ， \tilde{T}_s を導出する必要がある．この補間に対しても，式 (10)，(11) の関数 $D(\vec{x})$ が用いられる．格子点 \vec{x}_s から距離が d 離れた領域に含まれる格子点に対し，

$$\tilde{\vec{u}}_s = \sum_{i,j} \tilde{u}_{i,j} D(\vec{x}_{i,j} - \vec{x}_s) \cdot \delta_x^2, \quad (12)$$

$$\tilde{T}_s = \sum_{i,j} \tilde{T}_{i,j} D(\vec{x}_{i,j} - \vec{x}_s) \cdot \delta_x^2, \quad (13)$$

が適用され，境界上の値が補間される．式 (12)，(13) から得られた $\tilde{\vec{u}}_s$ ， \tilde{T}_s を，式 (5)，(7) に代入することで，境界上の外力とソース項が求められる．

Peng によって提案された TLBM では，密度および流速に対する分布関数 f_k と，温度に対する分布関数 g_k とが，

$$f_k(\vec{x} + \vec{c}_k \delta_t, t + \delta_t) - f_k(\vec{x}, t) = \Omega_{fk}(\vec{x}, t), \quad (14)$$

$$g_k(\vec{x} + \vec{c}_k \delta_t, t + \delta_t) - g_k(\vec{x}, t) = \Omega_{gk}(\vec{x}, t), \quad (15)$$

に従って運動する⁽⁸⁾．ここで， $f_k(\vec{x}, t)$ と $g_k(\vec{x}, t)$ は，場所 \vec{x} ，時間 t における離散速度 \vec{c}_k に対する粒子速度分布関数を表す．式 (14)，(15) の衝突項 $\Omega_{fk}(\vec{x}, t)$ ， $\Omega_{gk}(\vec{x}, t)$ に単一緩和時間近似を用いる．

$$\Omega_{fk}(\vec{x}, t) = -\frac{f_k(\vec{x}, t) - f_k^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_f} + \delta_t F_k(\vec{x}, t), \quad (16)$$

$$\Omega_{gk}(\vec{x}, t) = -\frac{g_k(\vec{x}, t) - g_k^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_g} + \delta_t q_k(\vec{x}, t). \quad (17)$$

ここで， τ_f と τ_g は緩和時間係数， $f_k^{eq}(\vec{x}, t)$ と $g_k^{eq}(\vec{x}, t)$ は平衡分布関数， $F_k(\vec{x}, t)$ と $q_k(\vec{x}, t)$ は，それぞれ，外力項とソース項を表す．密度 ρ ，流速 \vec{u} 及び，温度 T は分布関数を

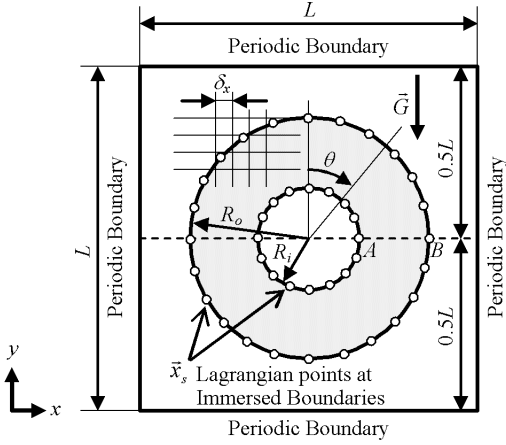


Fig. 2 Schematic diagram of whole computational domain with concentric cylinders.

用い,

$$\rho = \sum_{k=0}^8 f_k, \quad \vec{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 \vec{c}_k f_k, \quad T = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 g_k, \quad (18)$$

で与えられる. $D2Q9$ モデルに対する平衡分布関数 f_k^{eq} は,

$$f_k^{eq} = \omega_k \rho \left(1 + \frac{3\vec{c}_k \cdot \vec{u}}{c^2} + \frac{9(\vec{c}_k \cdot \vec{u})^2}{2c^4} - \frac{3\vec{u} \cdot \vec{u}}{2c^2} \right), \quad (19)$$

である. ここで, c は離散速度の大きさを表し, 格子間隔 δ_x に対し $\delta_x = c\delta_t$ の関係がある. ω_k は重み係数を表し, $\omega_0 = 4/9$, $\omega_{1,2,3,4} = 1/9$, $\omega_{5,6,7,8} = 1/36$ である. 温度に対する平衡分布関数 g_k^{eq} は,

$$g_0^{eq} = -\frac{2\rho T}{3} \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2}, \quad (20)$$

$$g_{1,2,3,4}^{eq} = \frac{\rho T}{9} \left(\frac{3}{2} + \frac{3\vec{c}_k \cdot \vec{u}}{2c^2} + \frac{9(\vec{c}_k \cdot \vec{u})^2}{2c^4} - \frac{3\vec{u} \cdot \vec{u}}{2c^2} \right), \quad (21)$$

$$g_{5,6,7,8}^{eq} = \frac{\rho T}{36} \left(3 + \frac{6\vec{c}_k \cdot \vec{u}}{c^2} + \frac{9(\vec{c}_k \cdot \vec{u})^2}{2c^4} - \frac{3\vec{u} \cdot \vec{u}}{2c^2} \right), \quad (22)$$

で与えられる.

Chapman-Enskog 展開を適用することにより, 式 (14) から連続の式 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ と, NS 方程式 (1) が, 式 (15) から温度方程式 (6) が, それぞれ, 導出される. 圧力, 動粘性係数, 熱拡散率は, それぞれ, $p = c^2 \rho / 3$, $\nu = c^2 (\tau_f - 0.5) \delta_t / 3$, $\chi = 2c^2 (\tau_g - 0.5) \delta_t / 3$ で与えられる.

式 (14) に付加される外力項 F_k は, 重力 \vec{G} を含み,

$$F_k = \rho \frac{3}{c^2} \omega_k \vec{c}_k \cdot (\vec{G} + \vec{F}), \quad (23)$$

で与えられる. この外力項 F_k は, $\sum_{k=0}^8 F_k = 0$, $\sum_{k=0}^8 \vec{c}_k F_k = \rho(\vec{G} + \vec{F})$ の関係を満足する. IB-LBM における式 (23) の外力

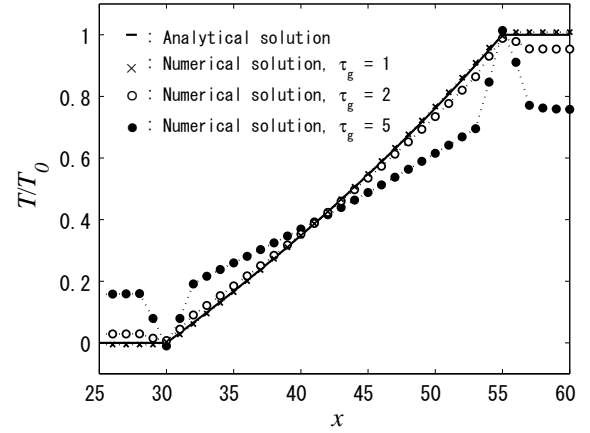


Fig. 3 Profiles of the temperature at the horizontal central plane $y = 100\delta_x$.

項の有効性は, Feng による剛体球の沈降の計算によって実証された⁽³⁾. 式 (15) に対するソース項 q_k に対し, $\sum_{k=0}^8 q_k = \rho Q$, $\sum_{k=0}^8 \vec{c}_k q_k = 0$ の関係を満足する最も簡単な式を用いる.

$$q_k = \begin{cases} \rho Q, & k = 0, \\ 0, & k = 1 - 8. \end{cases} \quad (24)$$

埋め込み境界法を適用した熱流動格子ボルツマン法のアルゴリズムは, 以下のようになる.

- Step 1. 式 (19)-(22) に, 初期条件 $\rho_{i,j}^{(1)}$, $\vec{u}_{i,j}^{(1)}$, $T_{i,j}^{(1)}$ を代入し, $f_k^{eq(1)}$, $g_k^{eq(1)}$ を求める. 分布関数の初期条件を $f_k^{(1)} = f_k^{eq(1)}$, $g_k^{(1)} = g_k^{eq(1)}$ によって与える.
- Step 2. 式 (14), (16), (23) に対し, $\vec{F} = 0$ とし, $\tilde{f}_k^{(n+1)}$ を計算し, 式 (18) から $\rho_{i,j}^{(n+1)}$, $\vec{u}_{i,j}^{(n+1)}$ を求める.
- Step 3. 式 (15), (17), (24) に対し, $Q = 0$ とし, $\tilde{g}_k^{(n+1)}$ を計算し, 式 (18) から $\tilde{T}_{i,j}^{(n+1)}$ を求める.
- Step 4. 式 (12), (13) を用い, $\tilde{u}_{i,j}^{(n+1)}$, $\tilde{T}_{i,j}^{(n+1)}$ から境界上の速度 $\tilde{u}_s^{(n+1)}$ と温度 $\tilde{T}_s^{(n+1)}$ を補間する.
- Step 5. 式 (5), (7) より, 境界上の外力 $\vec{F}_s^{(n+1)}$ とソース項 $Q_s^{(n+1)}$ を求める.
- Step 6. 式 (8), (9) を用い, $\vec{F}_s^{(n+1)}$, $Q_s^{(n+1)}$ からデカルト座標上の $\vec{F}_{i,j}^{(n+1)}$, $Q_{i,j}^{(n+1)}$ を補間する.
- Step 7. Step 6 で求めた $\vec{F}_{i,j}^{(n+1)}$, $Q_{i,j}^{(n+1)}$, および, \vec{G} を式 (23), (24) に代入し,

$$f_k^{(n+1)} = \tilde{f}_k^{(n+1)} + \delta_t F_k^{(n+1)}, \quad (25)$$

$$g_k^{(n+1)} = \tilde{g}_k^{(n+1)} + \delta_t q_k^{(n+1)}, \quad (26)$$

を計算することで, $f_k^{(n+1)}$, $g_k^{(n+1)}$ を更新する.

- Step 8. 1 タイムステップ δ_t 進め Step 2 に戻る.

3. 数値計算

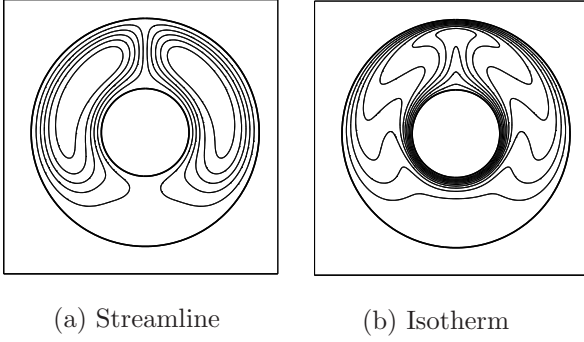


Fig. 4 Streamline and Isotherm for $Ra = 5 \times 10^4$, $Pr = 0.7$, $R_o/R_i = 0.8$.

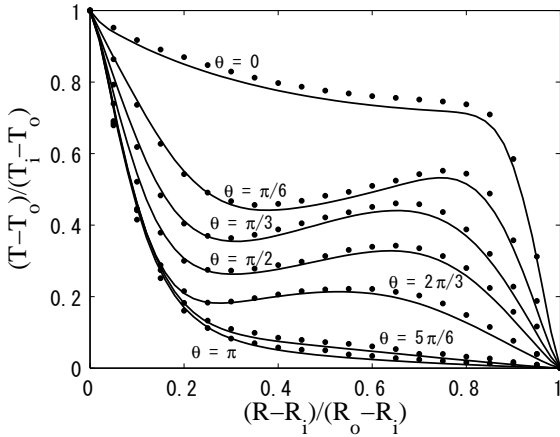


Fig. 5 Temperature distribution between the two cylinders. The solid lines represent the present numerical solutions. The symbols (•) represent the results from Kuehn and Goldstein⁽¹⁰⁾.

緩和時間係数 τ_g による，温度方程式 (6) の計算精度への影響を検証するため，Fig.2 に示される同心二重円筒間の熱伝導問題を計算する．半径が R_o ，温度が T_o の外円と，半径が R_i ，温度が T_i の内円に対し，式 (6) に対する厳密解 \hat{T} は，

$$\hat{T}(R) = \frac{T_o \log(R/R_i) - T_i \log(R/R_o)}{\log(R_o/R_i)}, \quad (27)$$

で与えられる．計算領域は $200\delta_x \times 200\delta_x$ ， $R_i = 40\delta_x$ ， $R_o = 70\delta_x$ ， $\vec{G} = \vec{0}$ ， $T_i = 1$ ， $T_o = 0$ ， $\delta_x = \delta_t = c = 1$ とし，緩和時間係数 τ_g を変更した場合の， $y = 100\delta_x$ の断面における温度分布を Fig.3 に示す． \times ， \circ ， \bullet は， $\tau_g = 1$ ， $\tau_g = 2$ ， $\tau_g = 5$ に対する計算結果を，実線は，式 (27) の厳密解を表す．収束判定条件は， $\max|T^{(n+1)} - T^{(n)}| \leq 10^{-8}$ を用いた．なお，本文中の全ての計算で，円を構成する点の総数は $N = 720$ ，デルタ関数を平滑化するスケールは $d = 2.0\delta_x$ とする．IB-LBM では，境界による影響を考慮しながら，円筒内および周囲固体壁内部も含めた全ての計算領域に対して，式 (14)，(15) による流速および温度の計算が行われる．Le⁽⁵⁾ によって示された流速の歪みと同様に，温度分布に対しても，緩和時間係数 τ_g が増加するにつれ，境界近傍で歪みが発生してい

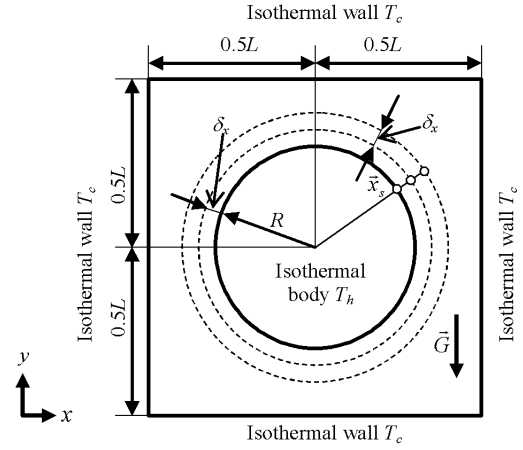


Fig. 6 Schematic diagram of the annulus between concentric circular and square cylinders.

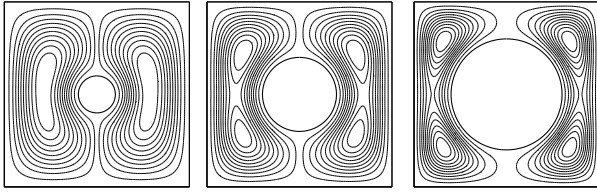
る．Le は IB-LBM の計算条件として $\tau_f < 2$ を提案しており，IB-LBM によって熱流動解析を行う場合も同様に，緩和時間係数 τ_g を小さくする必要がある．

次に，ブジネスク近似 $\vec{G} = (0, \beta G(T - T_m))$ を用い，同心二重円筒間の自然対流解析を行う．ここで， β は体積膨張率， G は重力加速度の大きさ， T_m は基準温度を表し， $T_m = 0.5$ とする．格子点数を 257×257 ，外円の半径を $R_o = 104\delta_x$ ，内円の半径を $R_i = 40\delta_x$ ，内円の温度を $T_i = 1$ ，外円の温度を $T_o = 0$ とする．ここで，境界上の計算精度を向上させるため，Multi-direct forcing method⁽⁹⁾ を採用した．Multi-direct forcing method で用いられる繰り返し計算回数は 20 回とした．また，境界上で流速および温度の歪みが発生しないように， τ_f ， τ_g を以下の手順で決定する．Jeong⁽⁶⁾ によって示されたように，代表速度 $U_0 = \sqrt{\beta G \Delta T H}$ の関係から，ブジネスク近似に必要な $\beta G = U_0^2 / \Delta T H$ が得られる．ここで， $\Delta T = T_i - T_o = 1$ ，代表長さ $H = R_o - R_i$ である．本計算では，圧縮性誤差の影響を受けないように，マッハ数が $Ma < 0.3$ を満足する代表速度 $U_0 = 0.1c$ を用いる．なお，音速は $c_s = c/\sqrt{3}$ である．代表速度 U_0 と，プラントル数 Pr ，レイリー数 Ra とを $Pr = \nu/\chi$ ， $Ra = \beta G \Delta T H^3 / \nu \chi = \sqrt{\beta G \Delta T H}^2 H^2 Pr / \nu^2$ に代入すると，動粘性係数 ν と熱拡散率 χ が与えられる． $\nu = c^2(\tau_f - 0.5)\delta_t/3$ ， $\chi = 2c^2(\tau_g - 0.5)\delta_t/3$ を用い，緩和時間係数 $\tau_f = 3U_0 H \sqrt{Pr} / (c^2 \delta_t \sqrt{Ra}) + 0.5$ ， $\tau_g = 1.5U_0 H / (c^2 \delta_t \sqrt{Pr Ra}) + 0.5$ が得られる．以上の手順に， $Pr = 0.7$ ， $Ra = 5 \times 10^4$ ， $H = R_o - R_i = 64\delta_x$ ， $U_0 = 0.1c$ の計算条件を適用した場合，緩和時間係数は $\tau_f = 0.5718$ ， $\tau_g = 0.5513$ となる．定常状態における流れ関数と温度分布を Fig.4 に示す．収束判定条件は，

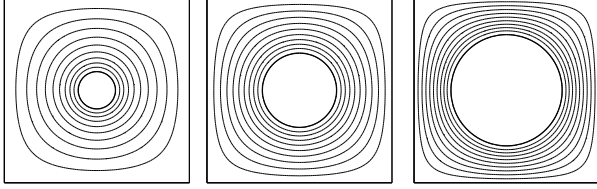
$$\max(|u|^{n+1} - |u|^n)| \leq 10^{-8}, \quad (28)$$

$$\max|T^{n+1} - T^n| \leq 10^{-8}, \quad (29)$$

とした．Kuehn による計算結果⁽¹⁰⁾ とほぼ等しい分布を Fig.4

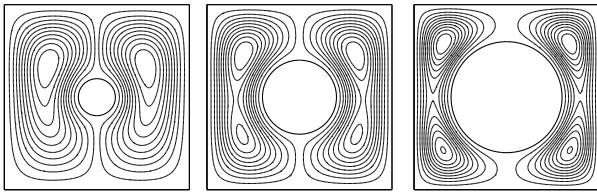


(a.1) $R/L = 0.1$ (a.2) $R/L = 0.2$ (a.3) $R/L = 0.3$

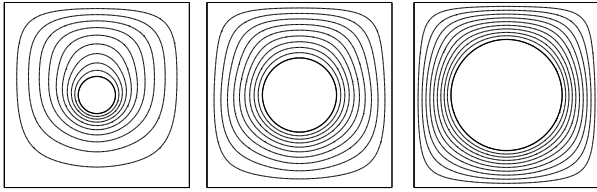


(b.1) $R/L = 0.1$ (b.2) $R/L = 0.2$ (b.3) $R/L = 0.3$

Fig. 7 (a) Streamlines; (b) Isotherms ($Ra = 10^3$).



(a.1) $R/L = 0.1$ (a.2) $R/L = 0.2$ (a.3) $R/L = 0.3$

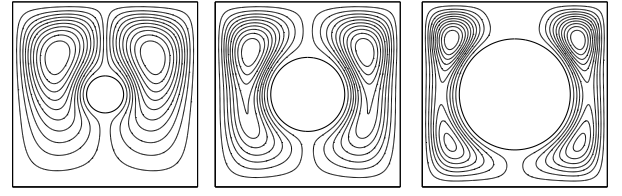


(b.1) $R/L = 0.1$ (b.2) $R/L = 0.2$ (b.3) $R/L = 0.3$

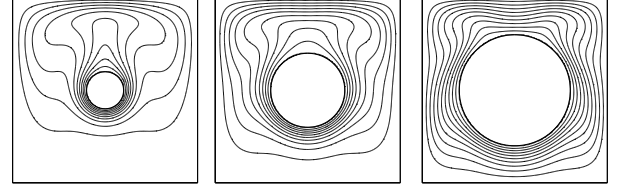
Fig. 8 (a) Streamlines; (b) Isotherms ($Ra = 10^4$).

は示す. Fig.2に示される角度 θ による温度分布の変化を Fig.5に示す. 実線は本計算結果を, \bullet は Kuehn の計算結果である. θ は y 軸の正の向きを0度, x 軸の正の向きを90度とした. 本手法による計算結果は, Kuehnの結果に対しやや低い値を示すが, 各角度において定性的によい一致を示す. 以上から, IB-LBMがブジネスク近似を用いた自然対流解析に適用可能なことが明らかになった.

最後に, 円柱周りの自然対流解析を行い, 温度分布, 流速分布, およびヌセルト数について検証する. Fig.6に示すように, 領域の中心に高温の円柱 ($T_h = 1$) を置き, 正方形の境界を低温 ($T_c = 0$) に設定する. 圧縮性誤差と緩和時間係数に注意し, 緩和時間係数 τ_f, τ_g は前記と同様の手順で与える. 浮力はブジネスク近似で与え, 格子点数と代表速度は, $Ra = 10^3$ に対し $101 \times 101, U_0 = 0.01c$, $Ra = 10^4$ に対し $151 \times 151, U_0 = 0.02c$, $Ra = 10^5$ に対し $201 \times 201, U_0 = 0.05c$, $Ra = 10^6$ に対し $251 \times 251, U_0 = 0.1c$ とする. プラントル数は参照解^(6, 11, 12)と比較するため, $Pr = 0.71$ である. 定常状態に対する収束判定条件には, 式(28), (29)を用いる. 円柱にはIBMを適用し, 正方領域の境界条件には, Zouによる非平衡分布関数に対するバウンズバック・ス

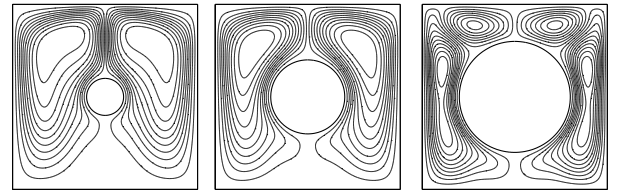


(a.1) $R/L = 0.1$ (a.2) $R/L = 0.2$ (a.3) $R/L = 0.3$

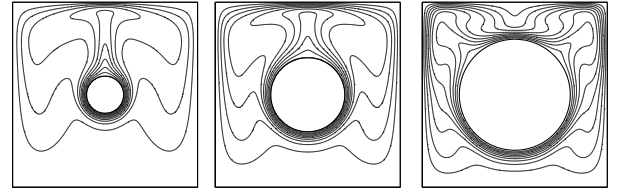


(b.1) $R/L = 0.1$ (b.2) $R/L = 0.2$ (b.3) $R/L = 0.3$

Fig. 9 (a) Streamlines; (b) Isotherms ($Ra = 10^5$).



(a.1) $R/L = 0.1$ (a.2) $R/L = 0.2$ (a.3) $R/L = 0.3$



(b.1) $R/L = 0.1$ (b.2) $R/L = 0.2$ (b.3) $R/L = 0.3$

Fig. 10 (a) Streamlines; (b) Isotherms ($Ra = 10^6$).

キーム⁽¹³⁾, $f_\alpha^{neq} = f_\beta^{neq}$, $g_\alpha^{neq} - c_\alpha^2 f_\alpha^{neq} = -(g_\beta^{neq} - c_\beta^2 f_\beta^{neq})$ によって温度と流速を設定する. ここで, α, β は, $\vec{c}_\alpha = -\vec{c}_\beta$ の関係を満たす逆向きの離散速度方向を表す. 計算領域の幅 L と半径 R との比による, 流れ関数と温度分布の変化を Figs.7-10に示す. 本手法により得られた温度および流れ関数は, Moukalled⁽¹¹⁾や Shu⁽¹²⁾によって示された計算結果とよい一致を示す. ヌセルト数 Nu は次式で定義され, n は円柱表面に対する法線方向, W は円柱周りの長さを表す⁽¹⁴⁾.

$$Nu = -\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall}, \quad \bar{Nu} = \frac{1}{W} \int_0^W Nu \, ds. \quad (30)$$

$\partial T / \partial n$ を計算するため, Fig.6に示す円柱から δ_x 離れた点上の温度 T_1 と, $2\delta_x$ 離れた点上の温度 T_2 とを, 式(13)によって補間する. 円柱を構成する720点全てに対し, $\partial T / \partial n \approx (-T_2 + 4T_1 - 3T_0) / 2\delta_x$ の2次精度片側差分近似によって $\partial T / \partial n$ を計算し, 平均ヌセルト数を求める. 表1に平均ヌセルト数をまとめる. Moukalled⁽¹¹⁾, Shu⁽¹²⁾, Jeong⁽⁶⁾の参照解とほぼ等しい結果が, IB-LBMにより得られることが分かる.

Table 1 Comparison of surface-averaged Nusselt number.

Ra	R/L	Present	Ref.[11]	Ref.[12]	Ref.[6]
10^3	0.2	3.370	—	—	3.399
	0.1	2.167	2.071	2.08	—
10^4	0.2	3.405	3.331	3.24	3.412
	0.3	5.703	5.826	5.40	—
10^5	0.1	3.965	3.825	3.79	—
	0.2	5.147	5.08	4.86	5.176
10^6	0.3	6.603	6.212	6.21	—
	0.1	6.406	6.107	6.11	—
10^6	0.2	9.388	9.374	8.90	9.171
	0.3	12.33	11.62	12.00	—

4. おわりに

Direct forcing method に基づく IB-LBM を用い、同心二重円筒間熱伝導問題の計算を行い、緩和時間係数が増大するにつれ、境界近傍で温度分布の歪みが発生することが示された。IB-LBM により熱流動解析を行う場合、二つの緩和時間係数を適切に設定する必要がある。境界の歪みに対する解決法として、デルタ関数に対するスケール d を大きくするか⁽⁵⁾、Implicit Velocity Correction Method⁽¹⁵⁾ の適用が考えられる。ただし、一般に LBM で $\tau > 1$ が用いられることはなく、IB-LBM において τ に対する条件が問題になることはほとんどない。同心二重円筒間の自然対流解析における流れ関数と温度分布は、Kuehn による計算結果⁽¹⁰⁾ と等しい結果が得られた。円柱周り自然対流解析を行い、円柱半径を変更した場合の温度分布、流れ関数分布、円柱上の平均ヌセルト数は、参照解^(6, 11, 12) とよい一致を示した。以上より、自然対流解析に対する IB-LBM の有効性が実証された。今後、熱輸送を考慮した粒子の沈降の計算を行う予定であるが、参照解と等しいレイノルズ数 $Re=40.5$ 、グラスホフ数 $Gr=4,500$ の計算条件を用いるためには、数値的安定性の問題を解決しなくてはならない。固液界面に生じる流体の漏れの問題⁽¹⁵⁾や、粒子内部の流体による粒子運動への影響⁽¹⁶⁾を考慮し、数値的安定性および計算精度を向上させる予定である。本研究は、科学研究費 (No.20560150) の支援のもとで行われた。ここに謝意を表する。本研究の実施に当たり、大変貴重なご意見を頂いた東京工業大学高橋亮一名誉教授、富山大学竹越栄俊名誉教授、富山大学奥井健一名誉教授に深謝する。

参考文献

- (1) Chen, S., Doolen, G. D.: Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 329–364.
- (2) Peskin, C. S.: Flow patterns around heart valves: A numerical method, *J. Comput. Phys.*, **10**(1972), pp. 252–271.
- (3) Feng, Z-G., Michaelides, E. E.: Proteus: A direct forcing method in the simulations of particulate flows, *J. Comput. Phys.*, **202**(2005), pp. 20–51.
- (4) Niu, X. D., Shu, C., Chew, Y. T., Peng Y.: A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows, *Phys. Lett. A*, **354**(2006), pp. 173–182.
- (5) Le, G., Zhang, J.: Boundary slip from the immersed boundary lattice Boltzmann models, *Phys. Rev. E*, **79**(2009), pp. 026701.
- (6) Jeong, H. K., Yoon, H. S., Ha, M. Y., Tsutahara, M.: An immersed boundary-thermal lattice Boltzmann method using an equilibrium internal energy density approach for the simulation of flows with heat transfer, *J. Comput. Phys.*, **229**(2010), pp. 2526–2543.
- (7) He, X., Chen, S., Doolen, G. D.: A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit, *J. Comput. Phys.*, **146**(1998), pp. 282–300.
- (8) Peng, Y., Shu, C., Chew, Y. T.: Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flow, *Phys. Rev. E*, **68**(2003), pp. 026701.
- (9) Wang, Z., Fan, J., Luo, K., Cen, K.: Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **52**(2009), pp. 4510–4518.
- (10) Kuehn, T. H., Goldstein, R. J.: An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders, *J. Fluid Mech.*, **74**(1976), pp. 695–719.
- (11) Moukalled, F., Acharya, S.: Natural convection in the annulus between concentric horizontal circular and square cylinders, *J. Thermophysics Heat Tr.*, **10**(1996), pp. 524–531.
- (12) Shu, C., Zhu, Y. D.: Efficient computation of natural convection in a concentric annulus between an outer square cylinder and an inner circular cylinder, *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, **38**(2002), pp. 429–445.
- (13) Zou, Q., He, X.: On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *Phys. Fluids*, **9**(1997), pp. 1591–1598.
- (14) Kim, B. S., Lee, D. S., Ha, M. Y., Yoon, H. S.: A numerical study of natural convection in a square enclosure with a circular cylinder at different vertical locations, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **51**(2008), pp. 1888–1906.
- (15) Wu, J., Shu, C.: Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications, *J. Comput. Phys.*, **228**(2009), pp. 1963–1979.
- (16) Feng, Z-G., Michaelides, E. E.: Robust treatment of no-slip boundary condition and velocity updating for the lattice-Boltzmann simulation of particulate flows, *Comput. Fluids*, **38**(2009), pp. 370–381.